§7.2 分式线性变换

一、线性变换

1.定义

*Def. 有理分式函数 $w=L(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\left(\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0\right)$ 对应的变换称为分式线性变换，简称线性变换.

逆变换：$w=\dfrac{az+b}{cz+d}\Rightarrow z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$ 也是线性变换

在变换 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 中，

(1) 当 $c\neq 0$ 时 $z=-\dfrac{d}{c}$ 对应 $w=\infty$.

(2) 当 $c\neq 0$ 时 $w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$，$z=\infty$ 对应 $w=\infty$.

这样，线性变换建立了扩充 z 平面到扩充 w 平面的一一映射.

2. 分式线性变换的分解

(1) 当 $c\neq 0$ 时 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{acz+bc}{acz+ad}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{bc-ad}{cz+d}$

(2) 当 $c=0$ 时 $w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$

这样，线性变换 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 可看成下面两个变换的复合：

I：$w=az+b$（整线性变换）

II：$w=\dfrac{1}{z}$（反演变换）

3. 整线性变换 $w=az+b$ 的几何性质：

$w\ \underline{\underline{a=\rho e^{i\alpha},\,z=re^{i\theta}}}\ \rho re^{i(\alpha+\theta)}+b$ 几何上可以看成：

伸缩、旋转、平移而成

例如，整线性变换将直线变为直线；将三角形变为相似三角形

4. 反演变换 $w=\dfrac{1}{z}$ 的几何性质：

$w=\dfrac{1}{z}$ 可以看成：$w=\overline{w_1}$，$w_1=\dfrac{1}{\bar z}$

$w=\overline{w_1}$ 关于实轴对称，$w_1=\dfrac{1}{\bar z}$ 关于单位圆对称

二、线性变换的性质

1. 线性变换的保形性

(1) 整线性变换 $w=az+b$ 保形 ($\frac{dw}{dz}=a\neq 0$)

(2) 反演变换 $w=\frac{1}{z}$ 保形 ($\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{z^2}\neq 0$)

曲线在 ∞ 点的夹角 α：将过 ∞ 的两光滑曲线用反演变换变为过原点的两条曲线的夹角 α 称为两曲线在 ∞ 的夹角.

于是整线性变换 $w=az+b$ 在 $z=\infty$ 保角

反演变换 $w=\frac{1}{z}$ 在 $z=0$ 保角，在 $z=\infty$ 也保角

综上，线性变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 在扩充z平面上保角.

2. 线性变换的保交比性

Def. 四个复数的交比 $(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$

Thm1. 线性变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$，记 $w_i=\frac{az_i+b}{cz_i+d}$，$i=1,2,3,4$.

则 $(w_1,w_2,w_3,w_4)=(z_1,z_2,z_3,z_4)$.

Pf. $w_i-w_j=\frac{az_i+b}{cz_i+d}-\frac{az_j+b}{cz_j+d}=\frac{(ad-bc)(z_i-z_j)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$

$(w_1,w_2,w_3,w_4)=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$

Rem (1) 四个复数中一个可以为 ∞，例如：

$(\infty,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{z_4-z_2}:\frac{1}{z_3-z_2}$

$(z_1,z_2,z_3,\infty)=1:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$

(2) 线性变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 中四个系数中三个独立.

例1 求线性变换 $w=L(z)$ 使 $z=2,i,-2$ 分别对应 $-1,i,1$

Sol. 根据线性变换保交比性，

$\frac{w+1}{w-i}:\frac{1+1}{1-i}=\frac{z-2}{z-i}=\frac{-2-2}{-2-i}$，解出 $w=\frac{z-6i}{3iz-2}$

3、线性变换的保圆性

Thm 2. 设γ是z平面上一条直线或圆周，$w=L(z)$为任一线性变换，记γ在该变换下的像曲线$\Gamma=L(\gamma)$，则Γ是w平面的直线或圆周.

Pf. (1) 在整线性变换下，圆周的像显然是圆周，直线的像显然是直线.

(2) 在反演变换$w=\frac{1}{z}$下，

设γ的方程：$Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C=0$.

其中$A=0$时表示直线，$A\neq 0$时表示圆周

在变换下，γ的像$\Gamma=L(\gamma)$的方程：

$C\cdot w\cdot\bar{w}+B\cdot w+\bar{B}\bar{w}+A=0$

当$C=0$时$\Gamma=L(\gamma)$表示直线，$C\neq 0$时$\Gamma=L(\gamma)$表示圆周

总结：若将直线看成半径为$+\infty$的圆，则 Thm 2. 表明线性变换保圆性.

4. 线性变换的保对称性

Def. (1) 平面中两点z_1, z_2关于直线γ对称：若γ将线段z_1z_2垂直平分.

(2) 平面中两点z_1, z_2关于圆周：$|z-a|=R$对称：z_1, z_2在过圆心a的同一条射线上，且$|z_2-a|\,|z_1-a|=R^2$

补充规定：圆心关于圆周对称点为∞.

Thm 3. 设γ是z平面上一条圆周或直线，z_1, z_2关于γ对称，在线性变换$w=L(z)$下，记$w_1=L(z_1)$，$w_2=L(z_2)$，$\Gamma=L(\gamma)$，则w_1, w_2关于$\Gamma=L(\gamma)$对称.

Pf. 略